Научная статья
УДК 517.53
DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-1-16-38

ФОРМУЛА ВОССТАНОВЛЕНИЯ МИТТАГ-ЛЕФЛЕРА ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Олег Александрович Данилов[1], Сяоцин Лу[2], Лиди Лю[3]

[1,2,3]Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия,

[1]my@odanilov67.ru, [2]lsaocin@gmail.com, [3]liulidi22@163.com

Аннотация

В работе доказано, что для любой целой аналитической функции порядка большего единицы и нормального типа, ассоциированный с нею ряд, составленный из дискретных аналитических полиномов, сходится абсолютно в положительном квадранте гауссовой плоскости.

Ключевые слова и фразы

преобразование Бореля, целая функция, дискретная аналитическая функция, ряд Тейлора.

Для цитирования

Данилов О. А., Лу С., Лю Л. Формула восстановления Миттаг - Лефлера для дискретных аналитических функций //*Математические труды*, 2025, Т. 28, № 1, С. 16-38. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-1-16-38

MITTAG-LEFLER RESTORATION FORMULA FOR DISCRETE ANALYTICAL FUNCTIONS

Oleg A. Danilov[1], Xiaoqing Lu[2], Lidi Liu[3]

[1,2,3]Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

[1]my@odanilov67.ru, [2]lsaocin@gmail.com, [3]liulidi22@163.com

Abstract

The paper proves that for any entire analytic function of order greater than one and of normal type, the associated series composed of discrete analytic polynomials converges absolutely in the positive quadrant of the Gaussian plane.

© Данилов О. А., Лу С., Лю Л., 2025

Keywords

Borel transform, entire function, discrete analytic function, Taylor series.

For citation

Danilov O. A., Lu X., Liu L. Mittag-Lefler restoration formula for discrete analytical functions //*Mat. Trudy*, 2025, V. 28, N. 1, P. 16-38. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-1-16-38

§ 1. Введение и постановка задачи

Понятие дискретной аналитической функции на гауссовой решетке $\mathbb{G} = \mathbb{Z} + i\,\mathbb{Z}$ было введено Р. Ф. Айзексом [1]. Он классифицировал эти функции на функции первого и второго рода и исследовал функции первого рода.

Далее Ж. Ферран [2] и Р. Дж. Даффин [3] создали теорию дискретных аналитических функций второго рода. Важные результаты, связанные с поведением дискретных аналитических и гармонических функций на бесконечности, были получены С. Л. Соболевым [4]. Новые плодотворные аналитические и комбинаторные идеи принес Д. Цайльбергер [5]. Их развил и обобщил А. Д. Медных [6]. Другой подход к дискретным аналитическим функциям был предложен У. Тёрстоном в работе [7], где была получена эффективная, быстросходящаяся аппроксимация в теореме Римана для конформных отображений односвязных римановых поверхностей.

Все вышеуказанные результаты основывались на различных непосредственных линейных и нелинейных дискретизациях уравнений Коши — Римана. Напомним, см. [1], что дискретная аналитическая функция $f : \mathbb{Z} + i\,\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ первого рода определяется линейным уравнением

$$f_{m,n+1} - f_{m,n} = i(f_{m+1,n} - f_{m,n}), \tag{1.1}$$

в то время как функции второго рода определяются уравнением вида:

$$f_{m,n+1} - f_{m+1,n} = i(f_{m+1,n+1} - f_{m,n}). \tag{1.2}$$

Пионерский шаг в понимании природы дискретных аналитических функций был предпринят Р. Дж. Даффином [8], где регулярная решетка $\mathbb{Z}+i\,\mathbb{Z}$ была заменена на произвольный граф с ромбическими гранями. Далеко идущие обобщения этих идей были даны К. Мерка [9], где линейная теория дискретных аналитических функций была распространена на дискретные римановы поверхности. Р. Кэниён [10], развил теорию оператора Дирака и построил функцию Грина для линейной теории на ромбических графах. Этот подход привел к важным приложениям в теории кодирования Р. Идальго [11].

Второй подход, связанный с нелинейной теорией, основан на идеях У. Тёрстона и показывает, что шаровые упаковки являются естественным дискретным аналогом аналитических функций ([12–15]). Одним из важнейших результатов данной теории является доказательство того, что голоморфное отображение в классической теореме Римана может быть конструктивно аппроксимировано шаровыми упаковками ([16–18]). Вариационный подход к шаровым упаковкам обсуждается в деталях в работе А. Бобенко, Б. Спрингборн [19].

Слово "нелинейный" является базисным свойством уравнений, описывающих шаровые упаковки. Для функции $f : \mathbb{Z} + i\,\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ на регулярной решетке такое уравнение введено в [20]:

$$\frac{(f_{m+1,n} - f_{m,n})(f_{m+1,n+1} - f_{m,n+1})}{(f_{m,n+1} - f_{m,n})(f_{m+1,n+1} - f_{m+1,n})} = -1. \tag{1.3}$$

Для шаровых упаковок с более глубокими комбинаторными идеями, обобщение этого уравнения на произвольные четырехугольные графы (планарные графы с четырехугольными гранями) дается в [21].

Нетрудно увидеть, что в каком-то смысле, решения уравнений (1.1), (1.2) и (1.3) являются дискретными аналогами аналитических функций. Действительно, предположим, что решетке $\mathbb{Z} + i\,\mathbb{Z}$ соответствует решетка $(m+in)\varepsilon \in \mathbb{C}$. Тогда ограничения аналитических функций на эту решетку удовлетворяют соответствующим уравнениям с точностью до $O(\varepsilon^2)$. Более точно, если $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ является аналитической, то

$$\frac{f(z+i\varepsilon) - f(z)}{f(z+\varepsilon) - f(z)} = i + O(\varepsilon^2),$$
$$\frac{f(z+i\varepsilon) - f(z+\varepsilon)}{f(z+\varepsilon+i\varepsilon) - f(z)} = i + O(\varepsilon^2),$$

и

$$\frac{(f(z+\varepsilon) - f(z))(f(z+\varepsilon+i\varepsilon) - f(z+i\varepsilon))}{(f(z+i\varepsilon) - f(z))(f(z+\varepsilon+i\varepsilon) - f(z+\varepsilon))} = -1 + O(\varepsilon^2)$$

Аналогичные соотношения справедливы на более общих графах.

До недавнего времени, линейная и нелинейная теории дискретных аналитических функций развивались раздельно. В работе А. Бобенко, К. Мерка, Ю. Суриса [22], показано, что в некотором точном смысле первая теория является линеаризацией второй. Данная теория особенно богата для случая квазикристаллических замощений. Этот класс включает в себя как двойные периодические замощения (которые естественным образом рассматриваются на торе), так и непериодические, подобные замощениям Пенроуза. В работах И. А. Дынникова и С. П. Новикова изучены дискретные аналитические функции на треугольных и шестиугольных решетках [23].

§ 2. Предварительные сведения

Введем некоторые понятия и обозначения, которые будут использоваться в дальнейшем.

2.1 Порядок и тип целой функции

Пусть дана целая функция $F(\xi)$. Обозначим

$$M_F(r) = \max_{|\xi|=r} |F(\xi)|.$$

По принципу максимума модуля имеем равенство $M_F = \max\limits_{|\xi|\leqslant r} |F(\xi)|$. Значит $M_F(r)$ — монотонно возрастающая функция. Если для некоторого $r_k \uparrow +\infty$ при некотором целом $m \geqslant 1$ и $A = \text{const}$ верны неравенства:

$$M_F(r_k) \leqslant A r_k^m,$$

тогда по неравенству Коши для коэффициентов c_n Тейлора функции $F(\xi)$ верно:

$$|c_n| \leqslant \frac{A \cdot r_k^m}{r_k^n} = A r_k^{m-n} \to 0, \quad k \to \infty$$

если $n > m$. Следовательно, $F(\xi)$ является полиномом степени $\leqslant m$. Поэтому принято сравнивать поведение $N_F(r)$ относительно функций вида e^{r^μ}.

Определение 2.1. *Порядком* ρ целой функции $F(\xi)$ называется нижняя грань ρ чисел μ таких, что $M_F(r) < e^{r^\mu}$ для всех r, начиная с некоторого $r_0 = r_0(\mu)$. Если таких чисел μ нет, то полагают $\rho = \infty$ и $F(\xi)$ называют функцией *бесконечного порядка.*

На языке неравенств имеем следующие соотношения.

По определению нижней грани для любого $\varepsilon > 0$ найдется $r_0(\varepsilon)$ и последовательность $r_k \uparrow \infty$ такие, что

$$\frac{\ln \ln M_F(r)}{\ln r} < \rho + \varepsilon \quad \text{для } r > r_0(\varepsilon) \tag{2.1}$$

и
$$\frac{\ln\ln M_F(r_k)}{\ln r_k} > \rho - \varepsilon \quad \text{для } k = 1, 2, \ldots. \tag{2.2}$$
Неравенства (2.1) и (2.2) эквивалентны условию
$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}}\, \frac{\ln\ln M_F(r)}{\ln r}.$$
Для сравнения скорости роста целых одного порядка вводят понятие типа.

Определение 2.2. *Типом* целой функции $F(\xi)$ порядка ρ называют нижнюю грань σ чисел ν таких, что $M_F(r) < e^{\nu \cdot r^\rho}$ начиная с некоторого $r_0 = r_0(\nu)$. Если таких числе σ нет, полагают $\sigma = \infty$ и $F(\xi)$ называют функцией *максимального типа.* При $0 < \sigma < \infty$, $F(\xi)$ называется функцией *среднего или нормального типа*, а при $\sigma = 0$ *минимального типа.*

Имеет место формула
$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}}\, \frac{\ln M_F(r)}{r^\rho}.$$
Порядок и тип целой функции $F(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \xi^k$ можно также выразить через коэффициенты c_k ее тейлоровского разложения. Имеют место формулы для ρ и σ, которые приведены в работе [26]:
$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln(\sqrt[n]{|c_n|})^{-1}} \tag{2.3}$$
$$\sigma = \frac{1}{e\rho}\, \overline{\lim_{n\to\infty}} (n \cdot \sqrt[n]{|c_n|^\rho}). \tag{2.4}$$

2.2 Дискретная аналитическая функция

Всюду в дальнейшем $\mathbb{G} = \{z = x + iy : \ x, y \in \mathbb{Z}\}$ — целочисленная гауссова решетка, а $\mathbb{G}^+$ — часть гауссовой плоскости, содержащейся в первом квадранте
$$\mathbb{G}^+ = \{z = x + iy \in \mathbb{G} : x \geqslant 0, \ y \geqslant 0\}.$$

Рассмотрим комплекснозначную функцию f, определенную на некотором множестве $\mathbb{E} \subset \mathbb{G}$. Если f определена на единичном квадрате, содержащем точки $\{z, z+1, z+1+i, z+i\}$, тогда f называется *дискретной аналитической функцией на этом квадрате*, если справедливо соотношение:
$$\frac{f(z+1+i) - f(z)}{i+1} = \frac{f(z+i) - f(z+1)}{i-1} \tag{2.5}$$

или иначе:

$$\overline{\partial} f(z) = f(z) + if(z+1) + i^2 f(z+1+i) + i^3 f(z+i) = 0. \qquad (2.6)$$

Если соотношение (2.6) справедливо для каждого единичного квадрата, принадлежащего множеству $\mathbb{E} \subset \mathbb{G}$, мы говорим, что f является *дискретной аналитической функцией на* $\mathbb{E}$. Дискретная аналитическая функция, определенная на $\mathbb{G}^+$ называется *дискретной целой.* Множество всех дискретных аналитических функций на $\mathbb{E}$ и на $\mathbb{G}^+$ обозначим соответственно $\mathcal{D}(\mathbb{E})$ и $\mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$. Равество (2.5) является дискретным аналогом свойства конформности для аналитических функций в следующем смысле. Перепишем соотношение (2.5) в виде:

$$\frac{f(z+1+i) - f(z)}{f(z+i) - f(z+1)} = \frac{i+1}{i-1}. \qquad (2.7)$$

Рассмотрим векторы

$$\overline{v}_1 = (z+1+i) - z = 1+i, \quad \overline{v}_2 = (z+i) - (z+1) = -1+i,$$
$$\overline{u}_1 = f(z+1+i) - f(z), \quad \overline{u}_2 = f(z+i) - f(z+1).$$

Очевидно, что $|\overline{v}_1| = |\overline{v}_2| = \sqrt{2}$ и $\widehat{\overline{v}_1, \overline{v}_2} = \frac{\pi}{2}$. По формуле (2.7) получим $|\overline{u}_1| = |\overline{u}_2|$ и $\widehat{\overline{u}_1, \overline{u}_2} = \frac{\pi}{2}$. Данные равенства позволяют рассматривать свойство (2.7) как аналог постоянства искажения масштаба в малом и консерватизма углов для аналитических функций. Разностный оператор $\overline{\partial}$, введенный соотношением (2.6), является дискретным аналогом оператора Коши — Римана из комплексного анализа.
Приведем примеры дискретных аналитических функций.

Пример 2.1. Для всех $z = x+iy \in \mathbb{G}$, функции: $1,\ z,\ z^2$, *биконстанта*

$$\mathcal{B}(z) = \mathcal{B}(x,y) = c_1 + c_2(-1)^{x+y},$$

где $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ — дискретные аналитические функции.

Пример 2.2. $e^z, z^3, z^4, z^{[n]}$, при $n \geqslant 3$ — не являются дискретными аналитическими функциями на любом единичном квадрате $\{z, z+1, z+1+i, z+i\}$. Псевдостепень $z^{[n]}$ определяется следующим образом. При $y = 0$, $z^{[n]} = x^{[n]} = x(x-1)\dots(x-n+1)$. В общем случае, для $z = x+iy \in \mathbb{G}$,

$$z^{[n]} = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{n}{s} i^{n-s} x^{[s]} y^{[n-s]}.$$

Из приведенных примеров 2.1 и 2.2 в частности, следует, что множество дискретных аналитических функций $\mathcal{D}(\mathbb{E})$ для произвольного $\mathbb{E} \subset \mathbb{G}$ *не является замкнутым относительно умножения*: $z, z^2 \in \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$, а $z^3 = z \cdot z^2 \notin \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$. Можно лишь утверждать, что $\mathcal{D}(\mathbb{E})$ является векторным пространством над $\mathbb{C}$. Кроме того, многочлены $\pi_3(z) = \pi_3(x, y) = z^3 - \frac{3}{2}(i+1)z^2 + \frac{1+2i}{2}z - iy$ и $\rho_3(z) = \rho_3(x, y) = z^3 + \frac{1}{2}z - iy$, которые будут определены позднее — *не являются классическими аналитическими функциями* z, но в то же самое время (это будет доказано далее) *являются дискретными аналитическими функциями дискретного переменного* z. Таким образом, *множество классических целых функций* $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ *и множество дискретных аналитических функций* $\mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$ *не являются подмножествами друг друга*: $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ не содежит в качестве подмножества $\mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$ и наоборот.

Пример 2.3. *Экспонента Цайльбергера.* Для произвольного $\xi \in \mathbb{C}$, определим функцию $e(\xi, z)$ переменного $z \in \mathbb{G}^+$ по формуле:

$$e(\xi, z) = e(\xi, x, y) = ((1+i)e^{\frac{\xi}{i+1}} - i)^x((1-i)e^{\frac{-\xi}{i+1}} + i)^y. \tag{2.8}$$

Имеет место очевидное равенство:

$$e(\xi, z_1 + z_2) = e(\xi, z_1) \cdot e(\xi, z_2)$$

для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{G}^+$, $\xi \in \mathbb{C}$. Проверим дискретную аналитичность функции $e(\xi, z)$ по формуле (2.6). Действительно,

$$\begin{aligned}
\overline{\partial} e(\xi, z) &= e(\xi, z) + ie(\xi, z+1) - e(\xi, z+1+i) - ie(\xi, z+i) = \\
&= ((1+i)e^{\frac{\xi}{i+1}} - i)^x((1-i)e^{\frac{-\xi}{i+1}} + i)^y + \\
&+ i((1+i)e^{\frac{\xi}{i+1}} - i)^{x+1}((1-i)e^{\frac{-\xi}{i+1}} + i)^y - \\
&- ((1+i)e^{\frac{\xi}{i+1}} - i)^{x+1}((1-i)e^{\frac{-\xi}{i+1}} + i)^{y+1} - \\
&- i((1+i)e^{\frac{\xi}{i+1}} - i)^x((1-i)e^{\frac{-\xi}{i+1}} + i)^{y+1} = \\
&= e(\xi, z)(1 + i((1+i)e^{\frac{\xi}{i+1}} - i) - ((1+i)e^{\frac{\xi}{i+1}} - i)((1-i)e^{\frac{-\xi}{i+1}} + i) - \\
&- i((1-i)e^{\frac{-\xi}{i+1}} + i)) = \\
&= e(\xi, z)(1 + (i-1)e^{\frac{\xi}{i+1}} + 1 - (1 - i^2) + e^{\frac{\xi}{i+1}}(1-i) + e^{\frac{-\xi}{i+1}}(i+1) - \\
&- 1 + (-i-1)e^{\frac{-\xi}{i+1}} + 1) = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом доказано, что $e(\xi, z)$ — дискретная аналитическая функция, где $\xi \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{G}^+$. Для примеров 2.1, 2.2 дискретная аналитичность проверяется аналогично.

Замечание 2.1. Отметим, что функция $e(\xi, z)$ также является голоморфной по ξ для всех $z \in \mathbb{G}^+$. Однако при $z \in \mathbb{G}\backslash\mathbb{G}^+$, $e(\xi, z)$ является голоморфной только в круге в круге $U_\varepsilon = \{\, \xi \in \mathbb{C}\ : |\, \xi\,| < \varepsilon\}$.

где

$$\varepsilon = \sqrt{2\left(\left(\frac{\log 2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right)} \approx 1.21405.$$

Пример 2.4. *Многочлены Цайльбергера* $\{\pi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$.

Для функции $e(\xi, z)$, определенной формулой (2.8), рассмотрим разложение Тейлора для всех $z \in \mathbb{G}$ по степеням ξ, $\xi \in U_\epsilon$:

$$e(\xi, z) = ((1+i)e^{\frac{\xi}{i+1}} - i)^x((1-i)e^{\frac{-\xi}{i+1}} + i)^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi_k(z)}{k!}\,\xi^k.$$

Для вычисления $\pi_k(z) = \pi_k(x, y)$ применим следующую *формулу Родрига*:

$$\pi_k(z) = \frac{d^k e(\xi, z)}{d\xi^k}\Big|_{\xi=0} = \frac{d^k}{d\xi^k}((1+i)e^{\frac{\xi}{1+i}} - i)^x((1-i)e^{\frac{-\xi}{1+i}} + i)^y\Big|_{\xi=0},$$

где $z \in \mathbb{G}$, $k = 0, 1, 2\ldots$. В частности, для $k = 0, 1, 2, 3$ получим

$$\pi_0(z) \equiv 1, \quad \pi_1(z) = z, \quad \pi_2(z) = z^2 - \frac{i+1}{2}\,z,$$
$$\pi_3(z) = z^3 - \frac{3}{2}\,(i+1)z^2 + \frac{1+2i}{2}\,z - iy.$$

Доказательство того факта, что функция $\pi_k(z)$ является многочленом степени k относительно (x, y) было дано в работе [5].

Проверим дискретную аналитичность $\pi_k(z)$ по формуле (2.6). Воспользуемся линейностью оператора дифференцирования $\dfrac{d^k}{d\xi^k}\Big|_{\xi=0}$ а также тем фактом, что $\overline{\partial} e(\xi, z) \equiv 0$ для всех $z \in \mathbb{G}$, $\xi \in U_\epsilon$, который доказан в предыдущем примере 2.3. Действительно,

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}\pi_k(z) &= \pi_k(z) + i\pi_k(z+1) - \pi_k(z+1+i) - i\pi_k(z+i) \\
&= \frac{d^k e(\xi, z)}{d\xi^k}\Big|_{\xi=0} + i\frac{d^k e(\xi, z+1)}{d\xi^k}\Big|_{\xi=0} \\
&- \frac{d^k e(\xi, z+1+i)}{d\xi^k}\Big|_{\xi=0} - i\frac{d^k e(\xi, z+i)}{d\xi^k}\Big|_{\xi=0} \\
&= \frac{d^k}{d\xi^k}[e(\xi, z) + ie(\xi, z+1) - e(\xi, z+1+i) - ie(\xi, z+i)]\Big|_{\xi=0} \\
&= \frac{d^k}{d\xi^k}(\overline{\partial} e(\xi, z))\Big|_{\xi=0} \equiv 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\pi_k(z),\ k = 0, 1, 2\dots$ – дискретные аналитические функции, где $z \in \mathbb{G}$. Функции $e(\xi, z), \{\pi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ введены Д. Цайльбергером в работе [5].

Пример 2.5. *Экспонента Даффина.*

Для произвольного $\xi \in U_2 = \{\, \xi \in \mathbb{C}\ : |\,\xi\,| < 2\}$, определим функцию $w(\xi, z)$ переменного $z \in \mathbb{G}$ по формуле:

$$w(\xi, z) = w(\xi, x, y) = \Big(\frac{2+\xi}{2-\xi}\Big)^x \Big(\frac{2+i\xi}{2-i\xi}\Big)^y. \tag{2.9}$$

Очевидно важное равенство:

$$w(\xi, z_1 + z_2) = w(\xi, z_1) \cdot w(\xi, z_2)$$

для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{G}^+, \xi \in U_2$. Проверим дискретную аналитичность функции $w(\xi, z)$ по формуле (2.6). Действительно,

$$\begin{aligned}
\overline{\partial} w(\xi, z) &= w(\xi, z) + iw(\xi, z+1) - w(\xi, z+1+i) - iw(\xi, z+i) \\
&= \Big(\frac{2+\xi}{2-\xi}\Big)^x \Big(\frac{2+i\xi}{2-i\xi}\Big)^y + i\Big(\frac{2+\xi}{2-\xi}\Big)^{x+1} \Big(\frac{2+i\xi}{2-i\xi}\Big)^y \\
&- \Big(\frac{2+\xi}{2-\xi}\Big)^{x+1} \Big(\frac{2+i\xi}{2-i\xi}\Big)^{y+1} - i\Big(\frac{2+\xi}{2-\xi}\Big)^x \Big(\frac{2+i\xi}{2-i\xi}\Big)^{y+1} \\
&= w(\xi, z)\Big(1 + i\Big(\frac{2+\xi}{2-\xi}\Big) - \Big(\frac{2+\xi}{2-\xi}\Big)\Big(\frac{2+i\xi}{2-i\xi}\Big) - i\Big(\frac{2+i\xi}{2-i\xi}\Big)\Big) \\
&= \frac{w(\xi, z)}{(2-\xi)(2-i\xi)}((2-\xi)(2-i\xi) + i(2+\xi)(2-i\xi) \\
&- (2+\xi)(2+i\xi) - i(2-\xi)(2+i\xi)) \equiv 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, функция $w(\xi, z)$ является дискретной аналитической функцией при $\xi \in U_2$, $z \in \mathbb{G}$.

Пример 2.6. *Многочлены Даффина* $\{\rho_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$.

Для функции $w(\xi, z)$, определенной формулой (2.9), рассмотрим разложение Тейлора по степеням ξ:

$$w(\xi, z) = \Big(\frac{2+\xi}{2-\xi}\Big)^x \cdot \Big(\frac{2+i\xi}{2-i\xi}\Big)^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho_k(z)}{k!}\xi^k.$$

Для вычисления $\rho_k(z) = \rho_k(x, y)$ применим следующую *формулу Родрига*:

$$\rho_k(z) = \frac{d^k w(\xi, z)}{d\xi^k}\Big|_{\xi=0} = \frac{d^k}{d\xi^k}\Big(\Big(\frac{2+\xi}{2-\xi}\Big)^x \cdot \Big(\frac{2+i\xi}{2-i\xi}\Big)^y\Big)\Big|_{\xi=0},$$

где $z \in \mathbb{G}$, $k = 0, 1, 2 \ldots$. В частности, для $k = 0, 1, 2, 3$ получим:

$$\rho_0(z) \equiv 1, \quad \rho_1(z) = z, \quad \rho_2(z) = z^2, \quad \rho_3(z) = z^3 + \frac{1}{2}z - iy.$$

Доказательство того факта, что функция $\rho_k(z)$ является многочленом степени k относительно (x, y) было дано в работе [3].

Установим дискретную аналитичность функций $\rho_k(z)$ по формуле (2.6). Воспользуемся линейностью оператора дифференцирования $\dfrac{d^k}{d\xi^k}\Big|_{\xi=0}$ а также тем фактом, что $\overline{\partial} w(\xi, z) \equiv 0$ для всех $\xi \in U_2$, $z \in \mathbb{G}$, который установлен в предыдущем примере 2.5. Действительно,

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}\rho_k(z) &= \rho_k(z) + i\rho_k(z+1) - \rho_k(z+1+i) - i\rho_k(z+i) \\
&= \frac{d^k w(\xi, z)}{d\xi^k}\Big|_{\xi=0} + i\frac{d^k w(\xi, z+1)}{d\xi^k}\Big|_{\xi=0} \\
&- \frac{d^k w(\xi, z+1+i)}{d\xi^k}\Big|_{\xi=0} - i\frac{d^k w(\xi, z+i)}{d\xi^k}\Big|_{\xi=0} \\
&= \frac{d^k}{d\xi^k}[w(\xi, z) + iw(\xi, z+1) - w(\xi, z+1+i) - iw(\xi, z+i)]\Big|_{\xi=0} \\
&= \frac{d^k}{d\xi^k}(\overline{\partial} w(\xi, z))\Big|_{\xi=0} \equiv 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, функции $\rho_k(z)$, $k = 0, 1, 2 \ldots$ являются дискретными аналитическими функциями при $z \in \mathbb{G}$. Функции $w(\xi, z)$, $\{\rho_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ введены Р. Дж. Даффиным в работе [3].

2.3 Обращение преобразования Бореля

Пусть $F(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k$ — целая функция порядка $\rho = 1$ нормального типа σ, $0 < \sigma < +\infty$.

Тогда $\gamma(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{k!\, a_k}{t^{k+1}}$ — ассоциированная с функцией $F(\xi)$ по Борелю. Ряд сходится при $|t| > \sigma$ и на границе $|t| = \sigma$ есть хотя бы одна особая точка.

Справедлива классическая формула Миттаг-Леффлера [24], обращающая преобразование Бореля $\gamma(t)$:

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=r>\sigma} e^{\xi t} \cdot \gamma(t)\, dt.$$

Если функция $F(\xi)$ имеет порядок $\rho > 1$ и нормальный тип σ, $0 < \sigma < +\infty$, имеется другая формула восстановления аналитической функции $F(\xi)$ по ее ассоциированной по Борелю функции $\gamma(t)$.

Введем

$$E_\rho(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}, \quad \rho > 0, \quad \text{а } \gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}{t^{k+1}}.$$

Тогда

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=r>\sigma} E_\rho(\xi t)\gamma(t)\, dt.$$

Замечание 2.2. $E_1(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} = e^\xi$.

Данные преобразования изучались в [24, 25].

В работе [5] для целой функции порядка $\rho = 1$ нормального типа σ $F(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k$ и экспоненты $e(\xi, z) = \left[(1+i)e^{+\frac{\xi}{1+i}} - i\right]^x \left[(1-i)e^{-\frac{\xi}{1+i}} + i\right]^y$, где $\xi \in \mathbb{C}$, а $z = x + iy \in \mathbb{G}^+$ рассматривается дискретное преобразование Бореля. Установлена формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\, a_k}{t^{k+1}} \cdot e(t, z)\, dt. \tag{2.10}$$

§ 3. Обобщенное дискретное преобразование Бореля

Нашей целью является обобщить формулу (2.10) на более широкий класс целых функций $F(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k$.

Введем *дискретную экспоненту* $e_\rho(\xi, z)$ по формуле:

$$e_1(\xi, z) = e(\xi, z) = \left[(1+i)e^{\frac{\xi}{1+i}} - i\right]^x \left[(1-i)e^{-\frac{\xi}{1+i}} + i\right]^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi_k(z)}{k!}\, \xi^k,$$

$$e_\rho(\xi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi_k(z)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}\, \xi^k,$$

где $\xi \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{G}^+$, $\rho > 0$.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 1, С. 16-38
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 1, P. 16-38

Теорема 3.1. *Пусть* $F(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k$ — *целая функция порядка* $\rho > 1$ *и нормального типа* σ, $0 < \sigma < +\infty$. *Тогда ассоциированный дискретный ряд* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z)$ *сходится* $\forall z \in \mathbb{G}^+$.

Доказательство. Для доказательства теоремы 3.1 нам понадобится следующая асимптотическая оценка для коэффициентов целой функции, взятая из работы [26]. □

Лемма 3.1. *Пусть для целой функции* $F(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k$ *существует положительное* $r_0 \in \mathbb{R}$ *такое, что при всех действительных* $r \geqslant r_0$ *выполнено неравенство* $M_F(r) < e^{\nu \cdot r}$ *для некоторого положительного* $\nu \in \mathbb{R}$. *Тогда для коэффициентов* c_k *ее тейлоровского разложения найдется целое* k_0 *такое, что при всех целых* $k \geqslant k_0$ *справедлива оценка*

$$|c_k| < \left(\frac{e\nu}{k}\right)^k.$$

Доказательство. Функция

$$e(\xi, z) = ((1+i)e^{\frac{\xi}{1+i}} - i)^x((1-i)e^{-\frac{\xi}{1+i}} + i)^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi_k(z)}{k!}\xi^k$$

является целой по переменному ξ при любых $z \in \mathbb{G}^+$. При $|\xi| = r \geqslant r_0 = 8$ имеет место цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} M_{e(\xi,z)}(r) &= \sup_{|\xi|=r} |e(\xi,z)| \leqslant (\sup_{|\xi|=r} |(1+i)e^{\frac{\xi}{1+i}} - i|)^x \cdot (\sup_{|\xi|=r} |(1-i)e^{\frac{-\xi}{1+i}} + i|)^y \\ &\leqslant (\sqrt{2}e^{\frac{r}{\sqrt{2}}} + 1)^x \cdot (\sqrt{2}e^{\frac{r}{\sqrt{2}}} + 1)^y \leqslant (2\sqrt{2}e^{\frac{r}{\sqrt{2}}})^{x+y} \\ &\leqslant \left(e^{2+\frac{r}{\sqrt{2}}}\right)^{x+y} \leqslant e^{r(x+y)}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

С помощью асимптотической формулы Стирлинга

$$\Gamma(n+1) = n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \text{ при } n \to \infty \tag{3.2}$$

и неравенств (3.1) и (3.2) при $k \geqslant k_0$, $r \geqslant r_0 = 8$ получим оценку для чисел $\frac{|\pi_k(z)|}{k!}$, которые являются тейлоровскими коэффициентами функции

$e(\xi, z)$:

$$|c_k| = \frac{|\pi_k(z)|}{k!} < \left(\frac{e(x+y)}{k}\right)^k = \frac{(x+y)^k}{\left(\frac{k}{e}\right)^k}$$
$$= \frac{(x+y)^k \cdot \sqrt{2\pi k}}{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k} \leqslant \frac{2\sqrt{\pi k}\,(x+y)^k}{k!}.$$

Следовательно, справедлива оценка:

$$|\pi_k(z)| \leqslant 2\sqrt{\pi k}\,(x+y)^k. \tag{3.3}$$

Пусть теперь $F(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k$ — произвольная целая функция порядка $\rho > 1$ и нормального типа σ, $0 < \sigma < \infty$. По формуле Коши — Адамара имеет место $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Следовательно, для ассоциированного дискретного ряда $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z)$ с учетом (3.3) получим следующее неравенство при любом $z \in \mathbb{G}^+$

$$0 \leqslant \sqrt[k]{|a_k \pi_k(z)|} \leqslant \sqrt[k]{|a_k|} \cdot \sqrt[k]{2\sqrt{\pi k}}\ |x+y| \to 0$$

при $k \to \infty$. Таким образом, дискретный ряд $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z)$ сходится абсолютно при любом $z \in \mathbb{G}^+$. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть $\rho \geqslant 1$. Тогда функция $e_\rho(\xi, z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\pi_k(z)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}\, \xi^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \xi^k$ является целой по переменному ξ для любого $z \in \mathbb{G}^+$.*

Доказательство. Случай $\rho = 1$, $e_1(\xi, z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\pi_k(z)}{k!}\, \xi^k$ сразу получается из оценки для коэффициентов Тейлора (3.3) пункта 2.3

$$|c_k| = \frac{|\pi_k(z)|}{k!} \leqslant \frac{2\sqrt{\pi k}\,(x+y)^k}{k!},$$
$$0 \leqslant \sqrt[k]{|c_k|} \leqslant \frac{2^{1/k}(\pi k)^{1/(2k)}(x+y)}{\sqrt[k]{k!}} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Пусть теперь $\rho > 1$, $e_\rho(\xi, z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\pi_k(z)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}\, \xi^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \xi^k$. Мы имеем неравенство

$$|c_k| = \frac{|\pi_k(z)|}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)} \leqslant \frac{2\sqrt{\pi k}\,(x+y)^k}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}.$$

Оценим при $k \to \infty$ $\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}$. Пусть $n = \left[\dfrac{k+1}{\rho}\right]$, $n \leqslant \dfrac{k+1}{\rho} < n+1$, $n > \dfrac{k+1}{\rho} - 1$, $n - 1 > \dfrac{k+1}{\rho} - 2$. По асимптотической формуле Стирлинга $n! = \Gamma(n+1) \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ при $n \to \infty$ имеем цепочку неравенств

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)} \leqslant \frac{1}{\Gamma(n)} = \frac{1}{(n-1)!} &\leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi(n-1)}\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}} \\
&< \frac{1}{\sqrt{\pi\left(\frac{k+1}{\rho}-2\right)}\left(\frac{k+1}{\rho}-2\right)^{\frac{k+1}{\rho}-2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{\rho}(k+1-2\rho)}\left(\frac{k+1-2\rho}{\rho}\right)^{\frac{k+1-2\rho}{\rho}}}.
\end{aligned}
$$

Откуда

$$
0 \leqslant \sqrt[k]{|c_k|} \leqslant \sqrt[k]{\frac{|\pi_k(z)|}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}} \leqslant \frac{2^{1/k}(\pi k)^{1/(2k)} \cdot (x+y)}{\left(\frac{\pi}{\rho}(k+1-2\rho)\right)^{1/(2k)}\left(\frac{k+1-2\rho}{\rho}\right)^{\frac{k+1-2\rho}{\rho k}}}.
$$

Так как $2^{1/k}$, $(\pi k)^{1/(2k)}$, $\left(\dfrac{\pi}{\rho}(k+1-2\rho)\right)^{1/(2k)} \to 1$, а $\dfrac{k+1-2\rho}{\rho k} \to \dfrac{1}{\rho}$, $\left(\dfrac{k+1-2\rho}{\rho}\right) \to \infty$ при $k \to +\infty$ получим $\sqrt[k]{|c_k|} \to 0$ при $k \to +\infty$. $\square$

Результаты, аналогичные теореме 1, получены в работах [6] (для случая $\rho = 1$ на $\mathbb{G}^+$) и Даниловым О. А. в [27] (в случае $\rho = 1$ на множестве $\mathbb{Q}_R$)

Следующее утверждение позволяет распространить дискретное преобразование Бореля, определенное формулой (2.10), на более широкий класс функций.

Теорема 3.2. *Пусть* $F(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k$ *— целая функция порядка* $\rho > 1$ *и нормального типа* σ, $0 < \sigma < +\infty$, *а* $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z)$ *— ассоциированный с* $F(\xi)$ *дискретный ряд,* $z \in \mathbb{G}^+$. *Имеет место равенство*

$$
f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta| = r > \sigma} \gamma(\zeta) e_\rho(\zeta, z)\, d\zeta,
$$

где $\gamma(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}{\zeta^{k+1}}$ *ассоциирована с* $F(\xi)$ *по Борелю, а* $e_\rho(\zeta, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi_k(z)\zeta^k}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}$ *— обобщенная функция Миттаг — Лефлера.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $F(\xi) = \xi^k$. Имеем

$$\gamma(\zeta) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}{\zeta^{k+1}}, \quad e_\rho(\zeta, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\pi_l(z)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}\,\zeta^l.$$

Установим следующее равенство

$$\pi_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r>\sigma} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}{\zeta^{k+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\pi_l(z)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{\rho}\right)}\,\zeta^l\,d\zeta, \tag{3.4}$$

По Лемме 2 функция $e_\rho(\zeta, z)$ целая при любом $z \in \mathbb{G}^+$, а $\gamma(\zeta) = \Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)/\zeta^{k+1}$ непрерывна на компактном множестве $C = \{|\zeta| = r > \sigma\}$. Следовательно, ряд $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}{\zeta^{k+1}} \cdot \frac{\pi_l(z)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{\rho}\right)}\,\zeta^l$ сходится абсолютно и равномерно на C и возможно поменять местами суммирование и интегрирование в правой части равенства (3.4).

Значит,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r>\sigma} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}{\zeta^{k+1}} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\pi_l(z)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{\rho}\right)}\,\zeta^l\,d\zeta \\
&\qquad = \Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\pi_l(z)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{\rho}\right)} \cdot \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r>\sigma} \frac{d\zeta}{\zeta^{k+1-l}}d\zeta \\
&= \Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\pi_l(z)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{\rho}\right)} \cdot \delta_{l,k} = \Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right) \frac{\pi_k(z)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)} = \pi_k(z),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$\delta_{l,k} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r>\sigma} \frac{d\zeta}{\zeta^{k+1-l}}d\zeta = \begin{cases} 1, & \text{если } k = l, \\ 0, & \text{если } k \neq l. \end{cases}$$

Пусть теперь $F(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k$ — произвольная целая функция порядка $\rho > 1$, нормального типа σ, $0 < \sigma < +\infty$. Тогда $\gamma(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}{\zeta^{k+1}}$

ассоциированная по Борелю $F(\xi)$, а $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\pi_k(z)$ — абсолютно сходящийся ряд при любом $z\in\mathbb{G}^+$ по Теореме 1.

Поскольку $\gamma(\zeta)$ абсолютно и равномерно сходится на множестве $C=\{|\zeta|=r>\sigma\}$, а $e_\rho(\zeta,z)=\sum\limits_{l=0}^{\infty}\frac{\pi_l(z)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{\rho}\right)}\zeta^l$ — целая, тогда произведение рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a_k\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}{\zeta^{k+1}}\times\sum\limits_{l=0}^{\infty}\frac{\pi_l(z)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{\rho}\right)}\zeta^l$ — сходится абсолютно и равномерно на C. Более того, оно представимо в виде суммы абсолютно и равномерно сходящихся рядов. Действительно

$$\begin{aligned}\gamma(\zeta)\cdot e_\rho(\zeta,z)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}{\zeta^{k+1}}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\pi_l(z)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{\rho}\right)}\zeta^l\\&=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)\left\{\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\pi_l(z)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{\rho}\right)}\zeta^{l-k-1}\right\}.\end{aligned}$$

Ряды в фигурных скобках сходятся абсолютно и равномерно на множестве C. Следовательно, возможно переставить интегрирование и суммирование

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r>\sigma}\gamma(\zeta)e_\rho(\zeta,z)\,d\zeta=\\&\qquad\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r>\sigma}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)\left\{\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\pi_l(z)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{\rho}\right)}\frac{d\zeta}{\zeta^{k+1-l}}\right\}d\zeta\\&\qquad=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left\{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r>\sigma}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\pi_l(z)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{\rho}\right)}\frac{d\zeta}{\zeta^{k+1-l}}d\zeta\right\}\end{aligned}\tag{3.6}$$

Воспользуемся формулой (3.5) и продолжим равенство (3.6):

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left\{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r>\sigma}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\pi_l(z)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{\rho}\right)}\frac{d\zeta}{\zeta^{k+1-l}}d\zeta\right\}=\\&\qquad\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left\{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\pi_l(z)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{\rho}\right)}\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r>\sigma}\frac{d\zeta}{\zeta^{k+1-l}}d\zeta\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\pi_k(z).\end{aligned}$$

□

§ 4. Пример разложения дискретной аналитической функции в ряд Тейлора с помощью функции Миттаг – Лефлера

Рассмотрим целую функцию вероятности ошибок $\mathrm{Erf}(\xi)$, определенную равенством

$$\mathrm{Erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-t^2}\,dt.$$

Тогда в точке $\xi_0 = 0$ разложение Тейлора функции $\mathrm{Erf}(\xi)$ примет вид:

$$e^{-t^2} = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}\,,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Erf}(\xi) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, t^{2n}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\xi} t^{2n}\,dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, \frac{\xi^{2n+1}}{2n+1}\,.\end{aligned}$$

Перестановка суммирования и интегрирования возможна в силу того, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, t^{2n}$ сходится абсолютно и равномерно на любом компактном множестве $M \subset \mathbb{C}$.

Вычислим порядок ρ и тип σ для функции $\mathrm{Erf}(\xi)$ по формуле (2.3). Поскольку

$$\begin{cases} c_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}, & k = 0, 1, 2, \dots, \\ c_{2k+2} = 0, & k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

тогда

$$\begin{aligned}\rho &= \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{\ln n}{\ln \sqrt[n]{|c_n|^{-1}}} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\ln(2k+1)}{\ln \sqrt[2k+1]{k! \cdot (2k+1)}} = \frac{(2k+1)\ln(2k+1)}{\ln k! + \ln(2k+1)} \right. \\ &= \frac{(2k+1)\ln(2k+1)}{\ln\big((\frac{k}{e})^k \sqrt{2\pi k}\big) + o\big(\ln(\frac{k}{e})^k \sqrt{2\pi k}\big) + \ln(2k+1)} \\ &= \left. \frac{(2k+1)\ln(2k+1)/\ln\big((\frac{k}{e})^k \sqrt{2\pi k}\big)}{1 + \frac{o\left(\ln\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}\right)}{\left(\ln\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}\right)} + \frac{\ln(2k+1)}{\ln\left(\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}\right)}} \right].\end{aligned} \tag{4.1}$$

Преобразуем в равенстве (4.1)

$$\ln\left(\left(\frac{k}{e}\right)^k\sqrt{2\pi k}\right) = k\ln k - k + 1 + \frac{1}{2}\,\ln(2\pi k),$$

и заметим, что при $k \to \infty$

$$\frac{o\big(\ln\big(\frac{k}{e}\big)^k\sqrt{2\pi k}\big)}{\ln\big(\big(\frac{k}{e}\big)^k\sqrt{2\pi k}\big)} \to 0, \quad \frac{\ln(2k+1)}{\ln\big(\big(\frac{k}{e}\big)^k\sqrt{2\pi k}\big)} = \frac{\ln(2k+1)}{k\ln k - k + \frac{1}{2}\,\ln(2\pi k)} \to 0.$$

По теореме Лопиталя раскроем неопределенность

$$\lim_{k\to+\infty}\left[\frac{(2k+1)\ln(2k+1)}{k\ln k - k + \frac{1}{2}\,\ln(2\pi k)} = \frac{\frac{2k+1}{k}\cdot\frac{\ln(2k+1)}{\ln k}}{1-\frac{1}{\ln k}+\frac{\ln(2\pi k)}{2k\ln k}}\right] = 2,$$

поскольку

$$\lim_{k\to\infty}\left[\frac{\ln(2k+1)}{\ln k} = \frac{\ln'(2k+1)}{\ln' k} = \frac{2k}{2k+1}\right] = 1, \quad \frac{\ln(2\pi k)}{2k\ln k} \to 0, \quad k \to +\infty.$$

Значит для функции $\mathrm{Erf}(\xi)$ порядок $\rho = 2$. Тип σ для $\mathrm{Erf}(\xi)$ вычислим по формуле (2.4):

$$\sigma = \overline{\lim_{n\to\infty}}(n\cdot\sqrt[n]{|c_n|^2})\cdot\frac{1}{\rho e} = \frac{1}{2e}\lim_{k\to\infty}\left((2k+1)\cdot\sqrt[2k+1]{\frac{1}{(k!)^2(2k+1)^2}}\right).$$

Воспользуемся формулой Стирлинга и получим, что

$$\sigma = \frac{1}{2e}\cdot\lim_{k\to\infty}\left[\frac{2k+1}{\sqrt[2k+1]{\left(\frac{k}{e}\right)^{2k}\cdot 2\pi k\cdot(2k+1)^2}}\right.$$

$$= \frac{2+\frac{1}{k}}{\left(\frac{k^{2k}}{k^{2k}}\cdot\frac{1}{e^{2k}}\cdot\frac{2\pi k}{k}\cdot(2k+1)^2\right)^{\frac{1}{2k+1}}}$$

$$\left. = \frac{\left(2+\frac{1}{k}\right)e^{\frac{2k}{2k+1}}}{(2k+1)^{\frac{2}{2k+1}}(2\pi)^{\frac{1}{2k+1}}}\right] = \frac{1}{2e}\cdot 2e = 1,$$

поскольку, очевидно, что $e^{\frac{2k}{2k+1}} \to 1$, $(2\pi)^{\frac{1}{2k+1}} \to 1$, $(2k+1)^{\frac{2}{2k+1}} \to 1$ при $k \to +\infty$. Значит тип σ функции $\mathrm{Erf}(\xi)$ равен 1. Следовательно, функция $\mathrm{Erf}(\xi)$ имеет порядок $\rho = 2$ и нормальный тип $\sigma = 1$, $0 < \sigma = 1 < +\infty$. По теореме 2, имеем для ассоциированного дискретного ряда $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\pi_k(z)$ разложение Тейлора принимает вид:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}\cdot\pi_{2k+1}(z).$$

§ 5. Заключение

В данной работе рассматривались дискретные аналитические функции порядка $\rho > 1$, заданных на гауссовой плоскости и их разложение в ряд Тейлора.

Основные результаты:

1) Корректно определено преобразование Бореля, отображающее множество целых функций порядка $\rho > 1$ и нормального типа σ в пространство дискретных аналитических функций.

2) Рассматривается преобразование Бореля, сопоставляющее каждой целой функции порядка $\rho > 1$ и нормального типа σ дискретную аналитическую функцию и приводится формула её восстановления. Это является аналогом классической формулы преобразования Миттаг-Леффлера.

3) Приведён пример целой функции ошибок $\mathrm{Erf}(\xi)$ порядка $\rho = 2$ и её образа в пространстве дискретных аналитических функций при преобразовании Бореля.

Авторы выражают глубокую благодарность А. Д. Медных за многочисленные обсуждения работы и замечания, которые способствовали улучшению статьи. Авторы благодарны Китайскому стипендиальному совету за финансовую поддержку.

Список литературы

1. *Isaacs R. F.* A Finite Difference Function Theory // *Univ. Nac. Tucuman. Revista A.* 1941. V. 2. P. 177–201.

2. *Ferrand J.* Functions Preharmoniques et Functions Preholomorphes // *Bull. Sci. Math., 2nd Ser.* 1944. V. 68. P. 152–180.

3. *Duffin R. J.* Basic Properties of Discrete Analytic Functions // *Duke Math. J.* 1956. V. 23. P. 335–363.

4. *Соболев С. Л.* Об одном разностном аналоге полигармонического уравнения // *Докл. АН СССР.* 1965. Т. 164. №. 1. С. 54–57.

5. *Zeilberger D.* A New Basis for Discrete Analytic Polynomials // *J. Austral. Math. Soc.* 1977. V. 23 (Series A). P. 95–104.

6. *Медных А. Д.* Дискретные аналитические функции и ряд Тейлора // *Теория отображений, ее обобщения и приложения.* Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка. 1982. С. 137–144.

7. *Thurston W. P.* The finite Riemann mapping theorem. Invited talk at international symposium on the occasion of the proof of the Bieberbach conjecture. // Purdue University, 1985.

8. *Duffin R. J.* Potential theory on rhombic lattice // *J. Combinatorial Theory.* 1968. V. 5. P. 258–272.

9. *Mercat Ch.* Discrete Riemann surfaces and the Ising model // *Commun. Math. Phys.* 2001. V. 218. P. 177–216.

10. *Kenyon R.* The Laplacian and Dirac operators on critical planar graphs. // *Invent. Math.* 2002. V. 150. P. 409–439.

11. *Hidalgo R. A. Godoy M. M.* Introduccion a las estructuras de superficies de Riemann discretas. 2007. https://dme2.ufro.cl/rhidalgo/files/discreta.pdf

12. *Beardon A. F., Stephenson K.* The uniformization theorem for circle packings // *Indiana Univ. Math. J.* 1990. V. 39. P. 1383–1425.

13. *Dubejko T., Stephenson K.* Circle packing: experiments in discrete analytic function theory // *Experiment. Math.* 1995. V. 4. P. 307–348.

14. *Schramm O.* Circle patterns with the combinatorics of the square grid // *Duke Math. J.* 1997. V. 86. P. 347–389.

15. *Stephenson K.* Circle packing and discrete analytic function theory // *Handbook of complex analysis: geometric function theory, V. 1.* Amsterdam: North-Holland. 2002. P. 333–370.

16. *Rodin B., Sullivan D.* The convergence of circle packings to Riemann mapping // *J. Diff. Geom.* 1987. V. 26. P. 349–360.

17. *Rodin B., Marden A.* On Thurston's formulation and proof of Andreev's theorem // *Lect. Notes Math.* 1990. V. 1435. P. 103–115.

18. *He Z.-X., Schramm O.* The C^∞-convergence of hexagonal disc packings to Riemann map // *Acta Math.* 1998. V. 180. P. 219–245.

19. *Bobenko A., Springborn B.* Variational principles for circle patterns and Koebe's theorem // *Trans. Amer. Math. Soc.* 2004. V. 356. P. 659–689.

20. *Nijhoff F., Capel H.* The discrete Korteweg-de Vries equation // *Acta Appl. Math.* 1995. V. 39. P. 133–158.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 1, С. 16-38
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 1, P. 16-38

21. *Bobenko A. I., Suris Y. B.* Integrable equations on quad-graphs // *Internat. Math. Res. Notices* 2002. V. 11. P. 573–611.

22. *Bobenko A. I., Mercat Ch., Suris Y. B.* Linear and nonlinear theories of discrete analytic functions. Integrable structure and isomonodromic Green's function // *J. Reine Angew. Math.* 2005. V. 583. P. 117–161.

23. *Dynnikov I.A., Novikov S.P.* Geometry of triangle equation on two-manifolds. // *Moscow Math. J.* 2003. V. 3, N. 2. P. 419–438.

24. *Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области.* М., Наука, 1966.

25. *Попов А. Ю.* Об обращении обобщенного преобразования Бореля // *Фундаментальная и прикладная математика.* 1999. Т. 5, № 3. С. 817–841.

26. *Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ.* Часть 1. Функции одного переменного. М.: Наука, 1976.

27. *Данилов О. А.* Интерполяционная формула Лагранжа для дискретной аналитической функции // *Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика.* 2008. Т. 8, №. 4. С. 33–39.

References

1. *Isaacs R. F.* A Finite Difference Function Theory // *Univ. Nac. Tucuman. Revista A.* 1941. V. 2. P. 177–201.

2. *Ferrand J.* Functions Preharmoniques et Functions Preholomorphes // *Bull. Sci. Math., 2^{nd} Ser.* 1944. V. 68. P. 152–180.

3. *Duffin R. J.* Basic Properties of Discrete Analytic Functions // *Duke Math. J.* 1956. V. 23. P. 335–363.

4. *Sobolev S. L.* A difference analogue of the polyharmonic equation // *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 1965. V. 164, N. 1. P. 54–57

5. *Zeilberger D.* A New Basis for Discrete Analytic Polynomials // *J. Austral. Math. Soc.* 1977. V. 23 (Series A). P. 95–104.

6. Mednykh A. D. Discrete analytical functions and Taylor series // *Mapping theory, its generalizations and applications.* Sb. nauch. tr. Kiev: Nauk. dumka. 1982. P. 137–144.

7. *Thurston W. P.* The finite Riemann mapping theorem. Invited talk at international symposium on the occasion of the proof of the Bieberbach conjecture // Purdue University, 1985.

8. *Duffin R. J.* Potential theory on rhombic lattice // *J. Combinatorial Theory.* 1968. V. 5. P. 258–272.

9. *Mercat Ch.* Discrete Riemann surfaces and the Ising model // *Commun. Math. Phys.* 2001. V. 218. P. 177–216.

10. *Kenyon R.* The Laplacian and Dirac operators on critical planar graphs. // *Invent. Math.* 2002. V. 150. P. 409–439.

11. *Hidalgo R. A. Godoy M. M.* Introduccion a las estructuras de superficies de Riemann discretas. 2007. https://dme2.ufro.cl/rhidalgo/files/discreta.pdf

12. *Beardon A. F., Stephenson K.* The uniformization theorem for circle packings // *Indiana Univ. Math. J.* 1990. V. 39. P. 1383–1425.

13. *Dubejko T., Stephenson K.* Circle packing: experiments in discrete analytic function theory // *Experiment. Math.* 1995. V. 4. P. 307–348.

14. *Schramm O.* Circle patterns with the combinatorics of the square grid // *Duke Math. J.* 1997. V. 86. P. 347–389.

15. *Stephenson K.* Circle packing and discrete analytic function theory // *Handbook of complex analysis: geometric function theory, V. 1.* Amsterdam: North-Holland. 2002. P. 333–370.

16. *Rodin B., Sullivan D.* The convergence of circle packings to Riemann mapping // *J. Diff. Geom.* 1987. V. 26. P. 349–360.

17. *Rodin B., Marden A.* On Thurston's formulation and proof of Andreev's theorem // *Lect. Notes Math.* 1990. V. 1435. P. 103–115.

18. *He Z.-X., Schramm O.* The C^∞-convergence of hexagonal disc packings to Riemann map // *Acta Math.* 1998. V. 180. P. 219–245.

19. *Bobenko A., Springborn B.* Variational principles for circle patterns and Koebe's theorem // *Trans. Amer. Math. Soc.* 2004. V. 356. P. 659–689.

20. *Nijhoff F., Capel H.* The discrete Korteweg-de Vries equation // *Acta Appl. Math.* 1995. V. 39. P. 133–158.

21. *Bobenko A. I., Suris Y. B.* Integrable equations on quad-graphs // *Internat. Math. Res. Notices* 2002. V. 11. P. 573–611.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 1, С. 16-38
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 1, P. 16-38

22. *Bobenko A. I., Mercat Ch., Suris Y. B.* Linear and nonlinear theories of discrete analytic functions. Integrable structure and isomonodromic Green's function // *J. Reine Angew. Math.* 2005. V. 583. P. 117–161.

23. *Dynnikov I.A., Novikov S.P.* Geometry of triangle equation on two-manifolds // *Moscow Math. J.* 2003. V. 3, N. 2. P. 419–438.

24. *Jrbashyan M. M. Integral transformations and representations of functions in a complex domain* // Moscow, Nauka Publ., 1966.

25. *Popov A. Yu.* On inversion of the generalized Borel transform // *Fundam. Prikl. Mat.* 1999. V. 5, N. 3, P. 817–841.

26. *Shabat B. V. Introduction to complex analysis.* Part 1. Functions of one variable. Moscow, Nauka Publ., 1976.

27. *Danilov O. A.* Lagrange Interpolating Formula for Discrete Analytic Function // *Vestnik Novosib.o Gos. Univ.: Ser.: Mat., Mekh., Inform..* 2008. V. 8, N. 4. P.33–39.

Информация об авторах

Олег Александрович Данилов, кандидат физико-математических наук, Scopus AuthorID: 522696
Сяоцин Лу, аспирант
Лиди Лю, магистрант

Author Information

Oleg A. Danilov, Candidate of Mathematics, Scopus AuthorID: 522696
Xiaoqing Lu, graduate student
Lidi Liu, master's student

Статья поступила в редакцию 27.12.2024; одобрена после рецензирования 26.01.2025; принята к публикации 29.01.2025

The article was submitted 27.12.2024; approved after reviewing 26.01.2025; accepted for publication 29.01.2025

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 1, С. 16-38
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 1, P. 16-38